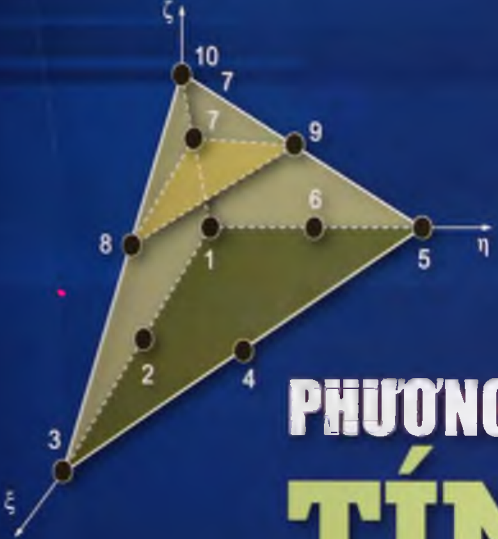
Ế HÙNG
CHÍNH



PHƯƠNG PHÁP TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

GS.TS. NGUYỄN THẾ HÙNG
PGS.TS. TRẦN VĂN CHÍNH

PHƯƠNG PHÁP TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2013

LỜI NÓI ĐẦU

*Giáo trình **Phương pháp tính** được biên soạn trên cơ sở những bài giảng của các tác giả cho các lớp Cao học và Đại học ngành Điện, Xây dựng, thuộc Đại học Đà Nẵng và một số trường đại học khác mà các tác giả có dịp tham gia giảng dạy.*

Nội dung của Giáo trình bao quát những vấn đề cơ bản nhất và mở rộng của phương pháp tính hiện đại, làm cơ sở để tính toán, giải quyết những vấn đề khoa học, kỹ thuật thường gặp thuộc các ngành kỹ thuật, đặc biệt là ngành Điện và Xây dựng.

Để giúp độc giả dễ dàng nắm bắt bài giảng và vận dụng lý thuyết, thuận lợi trong việc tính toán, ở mỗi mục khó của cuốn sách thường có kèm theo ví dụ tính toán đặc trưng, chương trình tính và cuối mỗi chương thường có một số bài tập.

Ngoài các ngành Điện và Xây dựng cơ bản, Giáo trình này còn làm tài liệu tham khảo cho các ngành khoa học kỹ thuật khác liên quan đến vấn đề tính toán gần đúng.

Các tác giả cảm ơn các giáo viên trợ giảng và trợ lý đã bổ sung các bài tập, đánh máy bản thảo làm cho nội dung Giáo trình được phong phú, đẹp đẽ thêm.

Các tác giả rất mong được bạn đọc góp ý, bổ khuyết để lần tái bản tới Giáo trình Phương pháp tính này được hoàn hảo hơn.

Các tác giả

Chương 1

SAI SỐ

(ERROR ANALYSIS)

1.1. TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG PHÁP TÍNH

1.1.1. Khái niệm về phương pháp tính

Phương pháp số (Numerical method) là một lĩnh vực của toán học chuyên nghiên cứu những lý luận cơ bản và các phương pháp giải gần đúng các bài toán thường gặp trong toán học và kỹ thuật, kết quả tính toán được cho dưới dạng số. Đôi khi nó còn được gọi là Phương pháp tính (Computational method) hay Toán học tính toán (Computational mathematics).

Giải tích số (Numerical analysis) nhấn mạnh cả phương pháp xấp xỉ và phân tích toán học.

Phương pháp số quan tâm nhiều hơn đến sự lựa chọn và ứng dụng các kỹ thuật để giải quyết vấn đề khoa học kỹ thuật hơn là phân tích toán học như Giải tích số.

Chúng ta thấy rằng hầu hết các bài toán trong toán học như giải các phương trình đại số hay siêu việt, các hệ phương trình tuyến tính hay phi tuyến, các phương trình vi phân thường hay đạo hàm riêng, tính các tích phân,... thường khó giải đúng được, nghĩa là khó tìm kết quả dưới dạng giải tích.

Một số bài toán có thể giải đúng được nhưng biểu thức kết quả lại cồng kềnh, phức tạp, khối lượng tính toán rất lớn. Vì những lí do trên, việc giải gần đúng các bài toán là vô cùng cần thiết.

Các bài toán trong kĩ thuật thường dựa trên số liệu thực đo và các giả thiết gần đúng; do vậy việc tìm ra kết quả gần đúng với sai số cho phép là hoàn toàn có ý nghĩa thực tế.

Từ lâu các nhà khoa học đã nghiên cứu phương pháp tính và đã đạt nhiều kết quả quan trọng; tuy nhiên để lời giải đạt được độ chính xác cao, khối lượng tính toán thường rất lớn. Khi các phương tiện tính toán còn thô sơ, nhiều phương pháp tính đã được đề xuất, nhưng không thể thực hiện được vì khối lượng tính toán quá lớn; khó khăn trên đã làm phương pháp tính không phát triển được.

Ngày nay nhờ máy tính điện tử người ta đã giải rất nhanh các bài toán khổng lồ, phức tạp, đã kiểm nghiệm được các phương pháp tính cũ và đề ra các phương pháp tính mới. Phương pháp tính nhờ đó phát triển rất mạnh mẽ; nó là cầu nối giữa toán học và thực tiễn; là môn học không thể thiếu đối với các kỹ sư.

Ngoài nhiệm vụ chính của phương pháp tính là tìm các phương pháp giải gần đúng các bài toán không tìm được lời giải giải tích hoặc lời giải giải tích quá phức tạp, nó còn có nhiệm vụ khác như nghiên cứu tính chất nghiệm, nghiên cứu bài toán cực trị, xấp xỉ hàm v.v...

1.1.2. Các đặc điểm của phương pháp tính

Đặc điểm về phương pháp của môn học này là hữu hạn hoá và rời rạc hoá.

Phương pháp tính thường biến cái vô hạn thành cái hữu hạn, cái liên tục thành cái rời rạc và sau cùng lại trở về với cái vô hạn, cái liên tục. Nhưng cần chú ý rằng quá trình trở lại cái vô hạn, cái liên tục phải trả giá đắt vì khối lượng tính toán tăng lên rất nhiều. Cho nên trong thực tế người ta phải dừng lại khi nghiệm gần đúng sát với nghiệm đúng ở một mức độ nào đó.

Đặc điểm thứ hai của môn học là sự tiến đến kết quả bằng quá trình liên tiếp. Đó là quá trình chia ngày càng nhỏ hơn, càng dày đặc hơn hoặc quá trình tính toán bước sau dựa vào các kết quả của các bước trước. Công việc tính toán lặp đi lặp lại này rất thích hợp với máy điện toán.

Khi nghiên cứu phương pháp tính người ta thường triệt để lợi dụng các kết quả đã đạt được trong toán học. Cùng một bài toán có thể có nhiều phương pháp tính khác nhau.

Trong phương pháp tính, người ta thường quan tâm đến hai vấn đề chính:

- *Phương pháp* để giải bài toán.
- *Sai số* của lời giải.

Một phương pháp tính được coi là tốt nếu nó đạt các yêu cầu sau:

- Phương pháp tính được biểu diễn bằng một dãy hữu hạn các bước tính cụ thể. Các bước tính toán cụ thể này của phương pháp tính được gọi là thuật toán. Thuật toán càng đơn giản càng tốt.

- Đánh giá được sai số và sai số càng nhỏ càng tốt.

- Thuật toán thực hiện được trên máy điện toán và thời gian chạy máy ít nhất.

Giải gần đúng nghĩa là lời giải của bài toán so với lời giải đúng có một sai số nào đó. Sai số thường do rất nhiều nguồn tạo nên và nhiều khi rất khó ước lượng được. Ví dụ khi cần tìm lời giải của phương trình phi tuyến, ta sẽ có nhiều phương pháp giải khác nhau; mỗi phương pháp giải cần thời gian tính toán và độ chính xác khác nhau. Một người kỹ sư xây dựng khi tính toán để thiết kế một công trình, thực hiện rất nhiều phép tính, và nhiều khi rất khó xác định sai số tích lũy trong quá trình tính toán; nhưng kết quả vẫn được cơ quan có thẩm quyền duyệt chấp nhận. Tuy nhiên đối với các bài toán phức tạp, số lượng phép tính lớn, cần độ chính xác cao, nhất thiết phải được khảo sát nghiên cứu đầy đủ về sai số của lời giải.

Máy tính số có thể biểu diễn với độ chính xác bình thường (single), độ chính xác gấp đôi (double) hay độ chính xác mở rộng (extended). Nếu ta biết được mối liên hệ giữa lời giải số với lời giải đúng, sẽ biết nên chọn độ chính xác nào để kết quả đáp ứng được yêu cầu thực tế.

1.1.3. Những dạng sai số thường gặp

Trong thực tế, khi bài toán tìm xấp xỉ một mô hình toán học đã biết, ví dụ tìm nghiệm của một phương trình đã biết, tính tích phân xác định của một hàm số nào đó trên miền cho trước hoặc có những bài toán thực tế mà ngay cả mô hình toán học cũng chưa biết; ví dụ, dự báo về lượng mưa thay đổi do biến đổi khí hậu toàn cầu, nhu cầu thuê bao internet, ... Trong những trường hợp này, ta phải bắt đầu từ việc thu thập số liệu, xây dựng mô hình tính toán rồi tìm phương pháp giải số thích hợp... Nói chung khi thực hiện một bài toán bằng phương pháp số ta thường gặp những loại sai số sau đây:

- ***Sai số do mô hình hoá*** bài toán, do ta không thể tính được hết những yếu tố quan trọng ảnh hưởng đến bài toán, hoặc do ta biết được những yếu tố ảnh hưởng nhưng phải đơn giản hóa mô hình để có thể tính toán được.

- ***Sai số do phương pháp***: Phương pháp thay bài toán phức tạp bằng bài toán đơn giản (mỗi phương pháp gần đúng đều có sai số và thường các sai số này là khác nhau) sẽ tạo ra sai số phương pháp.

- ***Sai số do số liệu:*** Khi đo đạc ta phải sử dụng dụng cụ đo, mỗi dụng cụ đo đều có sai số.

- ***Sai số tính toán và chặt cụt:*** Sai số tính toán là sai số do ta làm tròn bởi tất cả các lần quy tròn trong quá trình tính toán; sai số chặt cụt là sai số gây ra khi phải chặt cụt dãy số khai triển.

Những sai số trên đây, tùy theo bài toán, tích lũy lại nhiều khi dẫn đến những lời giải không thể chấp nhận được. Chính vì vậy việc tìm ra những phương pháp tốt, thuật toán hữu hiệu để giải các bài toán thực tế là điều rất cần thiết. Các phương pháp số hiện nay có rất nhiều, và còn nhiều vấn đề vẫn đang bỏ ngỏ. Trong cuốn sách này, chúng tôi chỉ giới thiệu một số phương pháp và thuật toán thông dụng để các kỹ sư và độc giả quan tâm có thể sử dụng được.

1.2. SAI SỐ TUYỆT ĐỐI

Gọi a là giá trị gần đúng của A, ta viết được: $A = a \pm \Delta a$

Δa gọi là sai số tuyệt đối giới hạn.

1.3. SAI SỐ TƯƠNG ĐỐI

$\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|}$, dạng khác: $A = a\,(1 \pm \delta a)$

Sai số tuyệt đối không nói lên đầy đủ "chất lượng" của một số xấp xỉ, chất lượng ấy được phản ánh qua sai số tương đối.

1.4. CÁCH VIẾT SỐ XẤP XỈ

Chữ số có nghĩa: Đó là chữ số $\neq 0$ đầu tiên tính từ trái sang phải.

Ví dụ: $002{,}74 \rightarrow 2{,}74$

$00{,}0207 \rightarrow 0{,}0207$

Chữ số đáng tin: Một số a có thể được viết $a = \pm \sum \alpha_s 10^s$

$$65{,}807 = 6.10^1 + 5.10^0 + 8.10^{-1} + 0.10^{-2} + 7.10^{-3}$$

Vậy: $\alpha_1 = 6,\ \alpha_0 = 5,\ \alpha_{-1} = 8,\ \alpha_{-2} = 0,\ \alpha_{-3} = 7$

Nếu $\Delta a \le 0{,}5.10^S$ thì α_S là chữ số đáng tin.

Nếu $\Delta a > 0{,}5.10^S$ thì α_S là chữ số đáng nghi.

Ví dụ: $a = 65{,}8274$; $\Delta a = 0{,}0043 \rightarrow$ Chữ số 6, 5, 8, 2 đáng tin

$\Delta a = 0{,}0067 \rightarrow$ Chữ số 6, 5, 8 đáng tin

1.5. SAI SỐ QUY TRÒN

Quy tắc quy tròn:

Chữ số bỏ đi đầu tiên ≥ 5: Thêm vào chữ số giữ lại cuối cùng 1 đơn vị

Chữ số bỏ đi đầu tiên < 5: Để nguyên chữ số giữ lại cuối cùng

Ví dụ: $65{,}8274 \rightarrow 65{,}827$; $65{,}827 \rightarrow 65{,}83$

1.6. SAI SỐ CỦA SỐ ĐÃ QUY TRÒN

Giả sử quy tròn a thành a' với sai số quy tròn tuyệt đối $\theta a'$

$|a' - a| \le \theta a'$ thì $\Delta a' = \Delta a + \theta a'$ (tức tăng sai số tuyệt đối)

1.7. ẢNH HƯỞNG CỦA SAI SỐ QUY TRÒN

Áp dụng nhị thức Newton, ta có:

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^{10} = 3363 - 2378\sqrt{2}$$

Bây giờ thay $\sqrt{2}$ bởi các số quy tròn khác nhau: